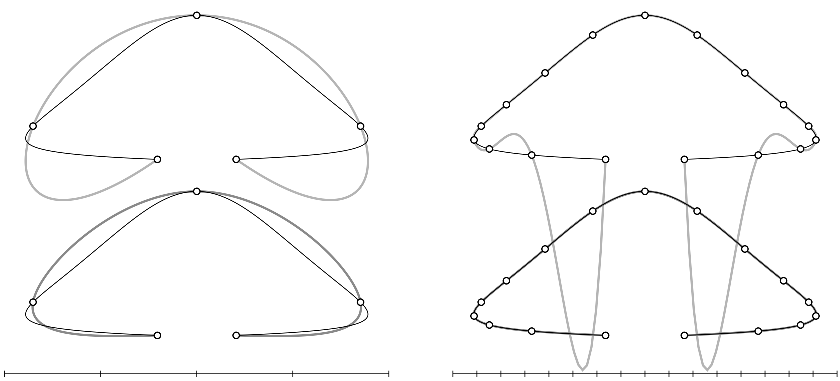
### 7.2.6. Błąd aproksymacji dla interpolacyjnych funkcji sklejanych

Zadania interpolacji są często stawiane w celu dokonywania aproksymacji. Przypuśćmy, że mamy pewną krzywą, narysowaną przez specjalistę (sytuacje tego typu możemy spotkać np. w projektowaniu czcionek) i chcemy znaleźć jej przybliżoną komputerową reprezentację. Możemy też chcieć odtwarzać powierzchnie fizycznie istniejących przedmiotów. Aby rozwiązać takie zadania, mierzy się współrzędne pewnej liczby punktów danej krzywej lub powierzchni, a następnie wyznacza krzywą lub powierzchnię interpolacyjną. Postawienie zadania interpolacyjnego nie określa jednak kształtu krzywej między punktami danymi. Jeśli znaleziona krzywa interpolacyjna odtwarza zadany kształt za mało dokładnie, to naturalne jest „zagęszczenie" danych, czyli podanie dodatkowych punktów, przez które krzywa ma przechodzić. Na kształt krzywej interpolacyjnej ma jednak ogromny wpływ klasa krzywych, w której poszukujemy rozwiązania zadania. Jeśli krzywa, którą konstruujemy, jest wielomianowa i między zadanymi punktami wykazuje zafalowania, to podanie większej liczby punktów (i dopuszczenie odpowiednio wyższego stopnia krzywej) na ogół da w efekcie krzywą o znacznie *większych* zafalowaniach (rys. 7.7). Dlatego wspomniane zagęszczanie danych jest dopuszczalne tylko wtedy, gdy wiadomo, że spowoduje zmniejszenie błędu aproksymacji.



Rysunek 7.7. Krzywe interpolacyjne odtwarzające zadany kształt. Krzywe w górnej części rysunku są wielomianowe, a w dolnej są naturalnymi krzywymi sklejanymi trzeciego stopnia. Wszystkie krzywe są oparte na węzłach równoodległych

Interpolacyjne funkcje (i krzywe) sklejane są często stosowane między innymi dlatego, że w wielu przypadkach stanowią dobre rozwiązania zadań aproksymacji i zagęszczanie węzłów interpolacyjnych umożliwia dowolne zmniejszenie błędu przybliżenia danej funkcji (albo krzywej). Znanych jest wiele twierdzeń na ten temat (można je znaleźć np. w książkach [1] lub [44]). Dotyczą one funkcji sklejanych różnych stopni, z różnymi warunkami brzegowymi, przybliżających dane funkcje o różnych własnościach. Niżej są podane dwa twierdzenia opisujące aproksymację funkcji $f$ klasy $C^2$ przez interpolacyjne funkcje sklejane trzeciego stopnia. Wynika z nich, że dwukrotne zagęszczenie ciągu węzłów interpolacyjnych powoduje cztero- lub (przy pewnych założeniach dodatkowych) nawet ośmiokrotne zmniejszenie oszacowania błędu aproksymacji przez funkcję sklejaną. Co więcej, twierdzenia te podają także oszacowania błędów aproksymacji pochodnych funkcji $f$ przez pochodne funkcji interpolacyjnej. Znając występujące w założeniach stałe, możemy na podstawie tych twierdzeń dobrać ciąg węzłów, który zapewni otrzymanie dostatecznie małego błędu w danym zastosowaniu.

**Twierdzenie 7.1.** *Niech $f$ oznacza funkcję klasy $C^2[a,b]$ i niech $M$ oznacza stałą, taką że $|f''(t)| \leqslant M$ dla każdego $t \in [u_0, u_N]$. Niech $s$ oznacza funkcję sklejaną trzeciego stopnia klasy $C^2$ z węzłami $u_0 = a < \cdots < u_N = b$, taką że $s(u_i) = f(u_i)$ dla $i = 0, \ldots, N$ oraz $|s''(a)| \leqslant 3M$ i $|s''(b)| \leqslant 3M$. Niech $h_i = u_{i+1} - u_i$ oraz $h = \max_{i\in\{0,\ldots,N-1\}} h_i$. Wtedy dla każdego $t \in [a,b]$*

$$|f(t) - s(t)| \leqslant \frac{1}{2}Mh^2, \tag{7.7}$$

$$|f'(t) - s'(t)| \leqslant 2Mh. \tag{7.8}$$

**Twierdzenie 7.2.** *Jeśli pochodna drugiego rzędu funkcji $f$ klasy $C^2[u_0, u_N]$ spełnia warunek Lipschitza, tj. istnieje stała $L$, taka że dla dowolnych $t_1, t_2 \in [u_0, u_N]$ jest spełniona nierówność $|f''(t_1) - f''(t_2)| \leqslant L|t_1 - t_2|$, a kubiczna interpolacyjna funkcja sklejana $s$ z węzłami $u_0, \ldots, u_N$ spełnia warunki $|s''(a) - f''(a)| \leqslant 3Lh$, $|s''(b) - f''(b)| \leqslant 3Lh$, to dla każdego $t \in [a,b]$*

$$|f(t) - s(t)| \leqslant \frac{7}{16}Lh^3, \tag{7.9}$$

$$|f'(t) - s'(t)| \leqslant \frac{7}{4}Lh^2, \tag{7.10}$$

$$|f''(t) - s''(t)| \leqslant \frac{7}{2}Lh. \tag{7.11}$$

**Lemat 7.1.** *Niech $s$ oznacza kubiczną funkcję sklejaną klasy $C^2[a,b]$ z węzłami $u_0 = a < u_1 < \cdots < u_N = b$. Niech $h_i = u_{i+1} - u_i$ dla $i = 0, \ldots, N-1$ i niech $x_i = s(u_i)$, $y_i = s'(u_i)$ i $z_i = s''(u_i)$ dla $i = 0, \ldots, N$. Liczby $z_0, \ldots, z_N$ spełniają układ równań*

$$\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}z_{i-1} + 2z_i + \frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}z_{i+1} = 6s[u_{i-1}, u_i, u_{i+1}], \qquad i = 1, \ldots, N-1. \tag{7.12}$$